25 novembre 2025

Corrigé 10

Exercice 1. Soient V et W des K-espaces vectoriels et soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Pour un sous-ensemble $Y \subset W$, posons $T^{-1}(Y) = \{v \in V \mid T(v) \in Y\}$. Montrer que si Y est un sous-espace vectoriel de W, alors $T^{-1}(Y)$ est un sous-espace vectoriel de V.

Solution 1. Comme Y est un sous-espace vectoriel, $0 \in Y$ et on sait que $T(0) = 0$. Donc $0 \in T^{-1}(Y)$. Maintenant soient $x, y \in T^{-1}(Y)$ et $\lambda \in K$. Alors par définition $T(x), T(y) \in Y$. Comme Y est un sous-espace vectoriel de W, $\lambda T(x) + T(y) \in Y$. Par linéarité de T, on a que $T(\lambda x + y) \in Y$ et $\lambda x + y \in T^{-1}(Y)$. Ces raisonnements démontrent que $T^{-1}(Y)$ est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 2. Écrire chacune des permutations suivantes sous la forme d'un produit de cycles disjoints et sous la forme d'un produit de transpositions.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution 2.

σ_1 : $1 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, et $4 \mapsto 5$, $5 \mapsto 4$.
Produit de cycles disjoints : $\sigma_1 = (1\ 3\ 2)(4\ 5)$.
Produit de transpositions : $\sigma_1 = (1\ 2)(1\ 3)(4\ 5)$.

σ_2 : $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $4 \mapsto 5$, $5 \mapsto 1$, et $3 \mapsto 6$, $6 \mapsto 3$.
Produit de cycles disjoints : $\sigma_2 = (1\ 2\ 4\ 5)(3\ 6)$.
Produit de transpositions : $\sigma_2 = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 2)(3\ 6)$.

σ_3 : $1 \mapsto 1$, et $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$.
Produit de cycles disjoints : $\sigma_3 = (2\ 3)$.
Produit de transpositions : $\sigma_3 = (2\ 3)$.

Exercice 3.

(a) Soit $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$. Montrer que H est un sous-groupe de S_n.

(b) Trouver la signature des permutations suivantes :

$$(1\ 2\ 4\ 5), \quad (1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 6), \quad (1\ 2\ 3\ \cdots\ r),$$

où $r \geq 2$.

Solution 3.

(a) On a que la permutation identité, appartient à H, donc H est non vide. Soient $\sigma, \tau \in H$; on a $\sigma\tau(n) = \sigma(\tau(n)) = \sigma(n) = n$. Donc $\sigma\tau \in H$. (Ici on écrit $\sigma\tau$ pour la composition $\sigma \circ \tau$.) Aussi comme $\sigma(n) = n$, $\sigma^{-1}(n) = n$ aussi et par conséquent $\sigma^{-1} \in H$. Ces arguments montrent que H est un sous-groupe de S_n.

(b) On peut vérifier que $(1\ 2\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 2)$ et donc sa signature est égale à -1.
Pour la deuxième permutation, comme sgn est un homomorphisme de groupe, on a que

$$\mathrm{sgn}((1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 6)) = \mathrm{sgn}((1\ 2))\mathrm{sgn}((3\ 4))\mathrm{sgn}((1\ 2\ 6)) = (-1)(-1)\mathrm{sgn}((1\ 6)(1\ 2)) = 1.$$

Enfin un r-cycle s'écrit comme un produit de $r-1$ transpositions et on a que

$$\mathrm{sgn}((1\ 2\ 3\ \cdots\ r)) = \mathrm{sgn}((1\ r)\cdots(1\ 2))$$

est égal à 1, si r est impair et à -1 si r est pair.

Exercice 4. Soit a un nombre réel fixé. On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour que A soit inversible et inverser A quand c'est possible.

(b) Inverser B si c'est possible.

Solution 4.

(a) Pour trouver l'inverse d'une matrice M, on procède comme suit : on met côte à côte M et I_n ; on fait des opérations élémentaires sur les lignes de M ainsi que les mêmes opérations sur les lignes de I_n ; on aboutit à I_n à partir de M et à M^{-1} à partir de I_n. De plus, cette méthode est aussi un test d'inversibilité : si les opérations élémentaires sur M n'aboutissent pas à I_n, alors M n'est pas inversible.
En suivant la méthode ci-dessus, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1-a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \to -L_1+L_3}{\overset{L_2 \to L_1+L_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_2+L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Donc si $a-1=0$ (c'est-à-dire $a=1$), cette matrice A n'est pas inversible, car on ne peut pas aboutir à I_3 à partir de A. Si $a-1 \neq 0$ (c'est-à-dire $a \neq 1$), on continue à faire des opérations élémentaires.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{a-1}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1-a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \to -L_3+L_2}{\overset{L_1 \to (a-1)L_3+L_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a-1} & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{array}\right).$$

Donc l'inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{a-2}{a-1} & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$, lorsque $a \neq 1$.

(b) On a

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \to 3L_2 + L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -L_3]{L_2 \to -L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to -L_4 + L_2 \\ L_1 \to -L_4 + L_1}]{L_3 \to 2L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \to -2L_3 + L_1]{L_2 \to -L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -15 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to -L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Donc B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & -2 \\ -10 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Sachant que

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants des matrices suivantes

$$T = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d + a & 2e + b & 2f + c \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a & b & c + a \\ d & e & f + d \\ g & h & i + g \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

Solution 5. Tout d'abord on rappelle la notation $L_r \to \lambda L_s + L_r$, utilisée pour désigner la matrice élémentaire associée à l'opération élémentaire sur les lignes, où on rajoute λ fois la ligne s à la ligne r. On rappelle aussi qu'une telle opération effectuée sur les lignes d'une matrice A résulte en une matrice A' dont le déterminant est égal à $\det(A)$.

(T) On obtient la matrice T en multipliant une ligne par -1. Donc

$$\det(T) = (-1) \cdot 7 = -7.$$

(S) On obtient la matrice S en multipliant la deuxieme ligne par 2, et après en faisant l'opération $L_2 \to L_1 + L_2$ sur les lignes. Donc

$$\det(S) = 2 \cdot 7 = 14.$$

(Z) La matrice Z a une ligne de zéros. Donc

$$\det(Z) = 0.$$

(P) On obtient la matrice P en échangeant deux lignes. Donc

$$\det(P) = -1 \cdot 7 = -7.$$

(Q) On obtient la matrice Q en remplaçant la troisième colonne par sa somme avec la première. Donc

$$\det(Q) = 7$$

puisque cette opération correspond à effectuer $L_3 \to L_1 + L_3$ sur la transposée de T, et le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée.

(L) On obtient la matrice L en prenant la transposée de la matrice donnée. Donc

$$\det(L) = 7.$$